- Je hebt twee uur de tijd voor het oplossen van de vraagstukken.
- Elk vraagstuk is maximaal 10 punten waard.
- Begin elke opgave op een nieuw vel papier.

μKW uitwerkingen
12 juni 2015

Vraagstuk 1. We kunnen zinnen uit de Nederlandse taal vertalen naar predikatenlogica. Wat betekent dat we de symbolen $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$ en $\neg$ mogen gebruiken, waar dit laatste symbool staat voor 'niet', dus $\neg(1 = 2)$ betekent: 'het is niet zo dat $1 = 2$'. We mogen ook natuurlijke getallen gebruiken (let op: 0 is geen natuurlijk getal), en eventueel hulpsymbolen. Een uitspraak van de vorm $\forall x$ betekent $\forall x \in \mathbb{N}$. Bijvoorbeeld: de zin $\phi(x) = \exists y(x = 2 \cdot y)$ betekent: 'x is een even natuurlijk getal', met de hulpsymbolen $=$ en $\cdot$ (normaal mag je $=$ altijd gebruiken, maar in deze opgave is dat niet het geval!). De zin $\psi = \forall x \exists y(y > x \wedge \exists z(y = 2 \cdot z))$ betekent 'er bestaan oneindig veel even natuurlijke getallen', met de hulpsymbolen $>$, $=$ en $\cdot$. In deze opgave mag je alleen de hulpsymbolen $<$ en $|$ gebruiken, waar $x|y$ betekent: x is een deler van y. Let op: je mag dus symbolen als $\cdot$, $+$ en $=$ niet gebruiken!

(a) Vertaal de zin 'x is een priemgetal' naar predikatenlogica (3 pt.)
(b) Vertaal de zin 'x is van de vorm $4k + 1$' naar predikatenlogica (5 pt.)
(c) Vertaal de zin 'er bestaan oneindig veel priemgetallen van de vorm $4k+1$' naar predikatenlogica (hint: noem de zinnen uit a en b respectievelijk $\phi(x)$ en $\psi(x)$, dat scheelt schrijfwerk). (2 pt.)

Uitwerking:

(a) Wat we feitelijk willen hebben is de zin $\forall y(y|x \rightarrow y = 1 \vee y = x)$, maar we mogen het symbool $=$ niet gebruiken. Hier kunnen we omheen door op te merken dat $y = 1$ hetzelfde is als zeggen $y|1$, want 1 is de enige deler van 1. Verder is zeggen dat $x = y$ hetzelfde als zeggen dat x niet kleiner is dan y, en ook niet groter. Dus een correcte oplossing is:
$\forall y(y|x \rightarrow y|1 \vee (\neg(y < x) \wedge \neg(x < y)))$.

(b) We kunnen uitdrukken dat x van de vorm $4k + 1$ is door uit te drukken dat $x - 1$ deelbaar is door 4. Dit kunnen we doen door te zeggen dat er een getal is dat kleiner is dan x en deelbaar door 4, maar groter is dan alle andere getallen die kleiner zijn dan x, want dit is een unieke eigenschap van het getal $x - 1$. Een correcte oplossing is dus:
$\exists y(y < x \wedge 4|y \wedge \forall z(z < x \rightarrow \neg(y < z)))$.

(c) We gaan hier goed gebruik maken van de antwoorden bij opgaven a en b. Stel dat $\phi(x)$ uitdrukt dat x priem is en $\psi(x)$ dat x van de vorm $4k + 1$ is. Dan is de gewenste oplossing de zin die zegt dat er voor ieder getal y een groter getal x is zodat $\phi(x)$ en $\psi(x)$ geldig zijn (zie ook het voorbeeld dat in de opgave gegeven is). Dus de gewenste oplossing is $\forall y \exists x(y < x \wedge \phi(x) \wedge \psi(x))$. In totaal hebben we dus de volgende zin:

$$\forall y \exists x(y < x \wedge \forall z(z|x \to z|1 \vee (\neg(z < x) \wedge \neg(x < z))) \wedge \exists u(u < x \wedge 4|u \wedge \forall v(v < x \to \neg(u < v)))).$$

NB: het geven van de totale zin is niet nodig, het opmerken dat $\forall y \exists x(y < x \wedge \phi(x) \wedge \psi(x))$ de correcte zin is en een korte uitleg hierbij levert de volle punten op.

Vraagstuk 2. We definiëren de rij van Fibonacci als volgt: $F_0 = 0, F_1 = 1$ en $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ voor alle gehele $n \geq 0$.

(a) Bewijs dat $F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n$ voor alle gehele $m \geq 1, n \geq 0$. (5 pt.)

(b) Laat a, b natuurlijke getallen zijn met grootste gemene deler 1. Bewijs dat F_a en F_b ook grootste gemene deler 1 hebben. Je mag hierbij gebruiken dat twee getallen a en b een grootste gemene deler 1 hebben dan en slechts dan als er gehele getallen x en y bestaan met $ax + by = 1$ (5 pt.)

Uitwerking:

(a) We bewijzen deze bewering met inductie naar n waarbij we m als constant beschouwen. De inductiebasis is duidelijk. Voor $n = 0$ en $m \geq 1$ staat er $F_{m+0} = F_m F_1 + F_{m-1} F_0$ en voor $n = 1$ en $m \geq 1$ staat er $F_{m+1} = F_m F_2 + F_{m-1} F_1$ wat beide zeker waar is. Stel nu dat de bewering waar is voor het tweetal n en $n-1$ dan geldt er $F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n$ en $F_{m+n-1} = F_m F_n + F_{m-1} F_{n-1}$ voor alle $m \geq 1$. Voor F_{m+n+1} met $n \geq 1$ volgt nu gebruikmakend van de definitie van de Fibonacci rij en de inductiehypothese dat

$$\begin{aligned} F_{m+n+1} = F_{m+n} + F_{m+n-1} &= F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n + F_m F_n + F_{m-1} F_{n-1} \\ &= F_m (F_{n+1} + F_n) + F_{m-1}(F_n + F_{n-1}) = F_m F_{n+2} + F_{m-1} F_{n+1} \, . \end{aligned}$$

Wat precies de bewering is voor $n + 1$. Dit voltooit de inductie. Er volgt voor alle $m \geq 1$ en $n \geq 0$ dat $F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n$.

(b) **Oplossing I.** We bewijzen eerst een lemmaatje. Laat $s, t \in \mathbb{N}$ en neem aan dat er priemgetal p bestaat zodat $p \mid F_s$ en $p \mid F_t$, dan geldt er ook dat $p \mid F_{s+t}$. Uit deel (a) weten we immers dat $F_{s+t} = F_s F_{t+1} + F_{s-1} F_t$ en omdat p de rechterkant van deze vergelijking deelt moet p ook de linkerkant, F_{s+t}, delen.
Veronderstel dat de grootst gemene deler van F_a en F_b niet ongelijk aan 1 is, dan bestaat er een priemgetal p dat zowel F_a als F_b deelt. Herhaaldelijk toepassen van ons lemmaatje vertelt ons dat $p \mid F_{ma+nb}$ voor alle $m, n \in \mathbb{N}$. We weten dat er $x, y \in \mathbb{Z}$ bestaan zodat $ax + by = 1$. Schrijf nu $x = m - n$ en $y = m' - n'$ met $m, n, m', n' \in \mathbb{N}$ dan $am + bn = am' + bn' + 1$. We zien nu dat F_{am+bn} en $F_{am'+bn'}$ twee opeenvolgende Fibonacci getallen zijn met eenzelfde priemdeler. We gaan nu laten zien dat dit nooit mogelijk is, wat ons de tegenspraak geeft die we zoeken.
Stel een priemgetal q deelt F_t en F_{t+1} met $t \geq 1$ dan deelt q ook F_{t-1} vanwege de gelijkheid $F_{t-1} = F_{t+1} - F_t$. Dit herhaaldelijk toepassen laat zien dat q ook $F_1 = 1$ moet delen. Wat overduidelijk niet kan.

Oplossing II. Veronderstel dat de grootst gemene deler van F_a en F_b niet ongelijk aan 1 is, dan kunnen we een priemgetal p vinden dat zowel F_a als F_b deelt. Zij k het kleinste natuurlijke getal zodat $p \mid F_k$ en schrijf $a = mk + r$ met $m, r \in \mathbb{N}$ en $0 \leq r < k$. Uit het lemmaatje van Oplossing I volgt dat $p \mid F_{mk}$ en uit Oplossing I volgt ook dat p geen deler kan zijn van F_{mk-1} want F_{mk-1} en F_{mk} zijn twee opeenvolgende Fibonacci getallen. Uit deel (a) weten we dat $F_{mk+r} = F_{mk}F_{r+1} + F_{mk-1}F_r$ waardoor we nu zien dat $p \mid F_{mk-1}F_r$ en omdat p geen deler is van F_{mk-1} volgt dat $p \mid F_r$. Nu was k gedefinieerd als het kleinste natuurlijke getal zodat $p \mid F_k$ en er geldt $r < k$ dus er moet wel gelden dat $r = 0$. In het bijzonder is k een deler van a en analoog kunnen we laten zien dat k ook een deler is van b. Omdat $F_1 = F_2 = 1$ volgt dat $k \geq 3$ waardoor a en b een niet-triviale deler gemeen hebben. Dit geeft een tegenspraak met het feit dat ze relatief priem waren.

Opmerking. Een algemener resultaat is ook waar. Laat $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ (niet noodzakelijk verschillend) dan geldt $\text{ggd}(F_{a_1}, \ldots, F_{a_n}) = F_{\text{ggd}(a_1, \ldots, a_n)}$ wat eenvoudig bewezen kan worden. Voor $n = 2$ vinden we deel (b) van de opgave terug.

Vraagstuk 3.

(a) Zij V een eindige verzameling en (V, d) een metrische ruimte. Bewijs dat voor elke $v \in V$ de verzameling $\{v\}$ open is. (3 pt.)

(b) Zij V een oneindige verzameling. Bewijs dat er een metriek d op V bestaat waarvoor er een $v_0 \in V$ bestaat zo dat $\{v_0\}$ niet open is. (7 pt.)

Uitwerking:

(a) Als $V = \{v\}$ is het gevraagde duidelijk, dus neem aan dat $V = \{v, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ waarbij $n \geq 1$ een geheel getal is. Schrijf

$$r = \min_{1 \leq k \leq n} d(v, v_k),$$

dan geldt $r > 0$ omdat elke $d(v, v_k)$ positief is. Nu claimen we dat $B(v, r/2) = \{v\}$, waaruit volgt dat $\{v\}$ een open verzameling is. Stel namelijk dat er een $1 \leq k \leq n$ bestaat met $v_i \in B(v, r/2)$. Dan geldt dat

$$r/2 > d(v, v_i) \geq \min_{1 \leq k \leq n} d(v, v_k) = r,$$

een tegenspraak wegens $r > 0$.

(b) Omdat V een oneindige verzameling is kunnen we een aftelbare deelverzameling $\{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$ van V vinden. Schrijf $W = V \backslash \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$. We definiëren als volgt een metriek d op V:

- We interpreteren v_0 als het punt 0 op de reële lijn en v_i als het punt $\frac{1}{i}$, dus nemen $d(v_i, v_j) = \left|\frac{1}{i} - \frac{1}{j}\right|$ voor $i, j \geq 1$, $d(v_0, v_i) = \frac{1}{i}$ voor $i \geq 1$ en natuurlijk $d(v_0, v_0) = 0$.
- Voor $w_1, w_2 \in W$ nemen we $d(w_1, w_2) = 2$ als $w_1 \neq w_2$ en $d(w_1, w_2) = 0$ als $w_1 = w_2$.
- Voor $w \in W$ en $i \geq 0$ definiëren we $d(w, v_i) = d(v_i, w) = 2$.

Het is nu duidelijk dat d symmetrisch en dat bovendien $d(x,y) \geq 0$ met gelijkheid precies dan als $x = y$. We controleren dus enkel de driehoeksongelijkheid, oftewel dat $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. Omdat op $\{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$ (wegens de genoemde interpretatie) d gewoon overeenkomt met de standaard metriek op de reële getallen volgt de driehoeksongelijkheid meteen als $x, y, z \in \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$.

Stel nu dat niet alle drie de elementen in $\{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$ liggen. Omdat de driehoeksongelijkheid automatisch volgt als $x = y$, $x = z$ of $y = z$ mogen we aannemen dat x, y, z verschillend zijn. Omdat minstens één van de drie x, y, z in W ligt geldt dat $d(x,y) = 2$ of $d(y,z) = 2$. Omdat $d(x,z) \leq 2$ bewijst dit de driehoeksongelijkheid.

Nu tonen we aan dat $\{v_0\}$ niet open is. Stel dat dit zo zou zijn dan zou er een $r > 0$ bestaan met $B(v_0, r) \subset \{v_0\}$. Maar neem nu $n \in \mathbb{N}$ met $\frac{1}{n} < r$ dan geldt wegens $d(v_n, v_0) = \frac{1}{n} < r$ dat $v_n \in B(v_0, r)$, een tegenspraak.

Vraagstuk 4. Gegeven een $n \times n$-matrix A met reële elementen. Definieer a_k voor alle $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ als $a_k = \text{rang}(A^k)$. Bewijs de volgende stellingen:

(a) Voor alle $k \geq 1$ geldt dat $a_k \leq a_{k-1}$. (3 pt.)
(b) Voor alle $k \geq 1$ geldt dat $2a_k \leq a_{k-1} + a_{k+1}$. (4 pt.)
(c) Voor alle $k \geq n$ geldt dat $a_k = a_n$. (3 pt.)

Uitwerking:

(a) De matrix A zullen we interpreteren als een lineaire afbeelding van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^n$. We zien dan dat $a_k = \text{rang}(A^k) = \dim(A^k(\mathbb{R}^n))$.
Dan zien we dat $\mathbb{R}^n \supset A(\mathbb{R}^n)$ en door hierop herhaaldelijk de afbeelding A toe te passen vinden we dat
$$\mathbb{R}^n \supset A(\mathbb{R}^n) \supset A^2(\mathbb{R}^n) \supset \ldots,$$
waaruit volgt dat $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \ldots$.

(b) Laat $(p, q, r) = (a_{k-1}, a_k, a_{k+1})$, met dus $p \geq q \geq r$. Kies dan een basis $e_1, \ldots, e_p$ van $A^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ en kies de volgorde zo dat $Ae_1, \ldots, Ae_q$ een basis van $A^k(\mathbb{R}^n)$ is en $A^2e_1, \ldots, A^2e_r$ een basis van $A^{k+1}(\mathbb{R}^n)$ (dit kan omdat $A^{k+1}(\mathbb{R}^n)$ opgespannen wordt door het beeld van de basis van $A^k(\mathbb{R}^n)$).
Omdat $Ae_1, \ldots, Ae_q$ in $A^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ liggen en onafhankelijk zijn, kunnen we ze uitbreiden tot een basis
$$Ae_1, \ldots, Ae_q, f_{q+1}, \ldots, f_p$$
van $A^{k-1}(\mathbb{R}^n)$. Dat betekent dat $A^k(\mathbb{R}^n)$ opgespannen wordt door
$$A^2e_1, \ldots, A^2e_q, Af_{q+1}, \ldots, Af_p.$$
Maar we weten dat $A^2e_{r+1}, \ldots, A^2e_q$ allemaal afhankelijk zijn van de basis $A^2e_1, \ldots, A^2e_r$, dus we kunnen $A^k(\mathbb{R}^n)$ ook opspannen met alleen
$$A^2e_1, \ldots, A^2e_r, Af_{q+1}, \ldots, Af_p.$$

Dat zijn $r+p-q$ vectoren, dus $r+p-q \geq \dim(A^k(\mathbb{R}^n)) = q$, oftewel $2a_k \leq a_{k-1} + a_{k+1}$.

Het idee van deze oplossing is eigenlijk: als je door het toepassen van A een aantal dimensies verliest, dan kun je niet meer dimensies verliezen door A toe te passen op een deelruimte.

(c) Ten eerste merken we op dat $a_0 = n$. Verder kunnen we het resultaat van het vorige onderdeel omschrijven naar $a_{k-1} - a_k \geq a_k - a_{k+1}$.
Stel nu dat $a_n > a_{n+1}$, dan geldt $a_n - a_{n+1} \geq 1$. Daaruit volgt dat $a_k - a_{k+1} \geq 1$ voor alle $k = 0, \ldots, n$. Optellen geeft dan $n - a_{n+1} = a_0 - a_{n+1} \geq n+1$, maar dan zou $a_{n+1} \leq -1$ en dat kan niet. Dus $a_{n+1} \geq a_n$, waaruit volgt dat $a_{n+1} = a_n$. Nu is het nog een eenvoudige inductie om dit te laten zien voor alle $k \geq n+2$.